

# Játék 11 tüskén

Sokat kell játszani matematika órákon, mert a játékra fogékonyak (nyitottak) a gyerekek. Sok olyan gondolkodtató feladatot ismerünk, amelyhez eszközök szükségesek, vagy ha nem elengedhetetlenek, akkor megkönnyítik a megoldás megtalálását.

Évek óta olyan gondolkodtató feladatokat gyűjtögetek, amelyek megoldásához eszközök szükségesek. Ezekkel az eszközökkel az a baj, hogy – általában – csak egy bizonyos feladat megoldására használhatóak és így nem gazdaságos az elkészítésük.

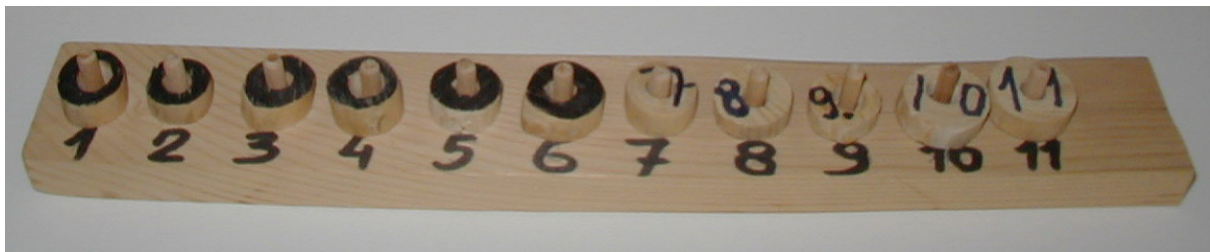
Áttekintve ezt a feladatgyűjteményt, olyan feladatokat is találtam, amelyek ugyanazon eszközzel játszhatók, még ha nem is kell mindig minden korongot és/vagy tüskét a játékba bevinni.

A feladatok egyre nehezebbek és/de nem épülnek egymásra. Alkalmanként egy, legfeljebb két feladatot oldunk meg. A következő alkalommal átvesszük a már megismert, megoldott feladatot és megoldjuk a következőt.

Erénye a játékoknak (vagy feladatoknak), hogy nem igényelnek bonyolult szabály ismeretet és otthoni készülést. Ugyanakkor segít a rejtett képességek felszínre hozásában, és olyan gyerekek juthatnak sikerélményhez matematika órán, akiknek szorgalom hiánya miatt nem volt részük benne.



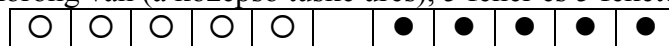
Technika órán elkészíthető a játék. A bakonysárkányi gyerekekkel, ősszel bodzaágakat vágunk és hagyjuk egy évig száradni. Az 1 – 1,5 cm vastag lefűrészelt korongok átmérője dönti el, hogy milyen hosszú lécebe fúrjuk a 6 mm-es átmérőjű lyukat a 11 db tiplinek. A korongok egyik oldalát csiszolás után befestjük valamilyen színre.



Mindenki készít magának egy ilyen játékot és az év folyamán ezen játszunk a következő játékokat:

## 1. HELYCSERE (1, 2)

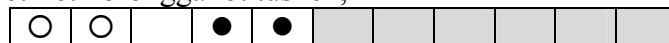
A 11 tüskén 10 korong van (a középső tüske üres), 5 fehér és 5 fekete.



*A játék célja: cseréljenek helyet a fehér és a fekete korongok!*

*Kétféle lépés lehetséges: áttesszünk egy korongot a szomszéd tüskére, ha az üres; vagy átugorjuk vele a mellette levő korongot, ha a következő tüske üres. Céljuk felé csak előre haladhatnak a korongok, visszafelé lépni tilos.*

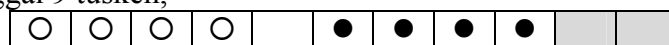
Kipróbálhatjuk két-két koronggal öt tüskén,



Vagy 3-3 koronggal 7 tüskén,



Vagy 4-4 koronggal 9 tüskén,



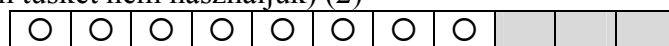
A szürkével jelzett tüskéket (területeket) ne használjuk a játék során. A szűkszavú szabályleírás néha szövegértési problémákat is felvet. Az élőszóval újrafogalmazott szabályleírás néhány tanulónak sokat segít és megadja a sikerélmény lehetőségét. Mindenkitől elvárható a kétkorongos feladat megoldása. Ha rájöttek a gyerekek az algoritmusra, akkor érdemes több koronggal próbálkozni, akár csak a Hanoi-toronynál (három korong után négyel). Fogalmazzassunk meg olyan állításokat, amelyek segítenek a megoldás megtalálásában. Pl.: két azonos színű korong nem **léphet** egymás mellé, mert akkor nem folytatható a játék.

A játék segít a divergens gondolkodás kialakításában, javítja a kombinatorikus készséget és kitartásra nevel. A sikeres megoldás megismétlése tanár vagy osztálytársak előtt a memóriát javítja, megadja a sikeres szereplés lehetőségét is. A játék alkalmas arra, hogy szemléltessük a programozásban használatos ciklust; az egyre növekvő korongszám jól játssza a változó szerepét.

A feladat megoldása 3 korongra 7 tükén:

1.	○	○	○		●	●	●				
2.	○	○	○	●		●	●				
3.	○	○		●	○	●	●				
4.	○		○	●	○	●	●				
5.	○	●	○		○	●	●				
6.	○	●	○	●	○		●				
7.	○	●	○	●	○	●					
8.	○	●		●	○	●	○				
9.		●	○	●	○	●	○				
10.	●		○	●	○	●	○				
11.	●	●	○		○	●	○				
12.	●	●	○	●	○		○				
13.	●	●	○	●		○	○				
14.	●	●		●	○	○	○				
15.	●	●	●		○	○	○				

2. **EGYMÁSRA RAKÁS 8 KORONGGAL** (egymást követő 8 tükén 8 korong, a maradék három tüskét nem használjuk) (2)



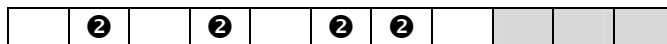
A következő játékot nyolc tükén levő, **nyolc** azonos színű koronggal játsszuk.

*A korongok közül egyet felemelünk, két korongot átugrunk vele, és a harmadikra rátesszük és többet nem mozgathatjuk. Értjük el, hogy négy tükén 2 -2 korong legyen.*

Így



Vagy így



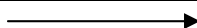
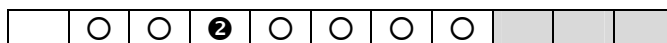
Esetleg így



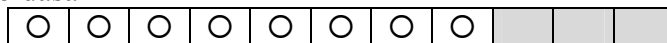
...és még a forgás szimmetriák.

Az első probléma az szokott lenni, hogy a korongot és tüskét azonosnak veszik a gyerekek, főleg és szabálytalan lépéseket próbálnak lépni. A „megoldás” megtalálása után a feladat a tanár előtti megismétlése könnyen fényt derít a félreértésekre.

A megoldás könnyen megtalálható, ha **rendszeresen** próbálkozik a gyerek és az elért állapotról jó következtetést von le. Itt is fogalmaztassunk meg olyan igaz állításokat, amelyek segítenek a megoldás keresésében. Pl.: két korong nem szigetelhető el.



A feladat egyik megoldása



1.



2.



3.



4.

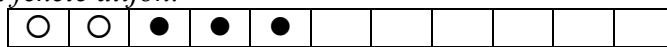


### 3. ÖT KORONG SZÉTVÁLOGATÁSA 11 TÜSKÉN

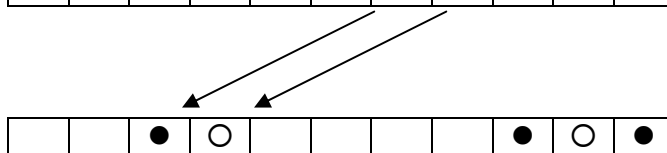
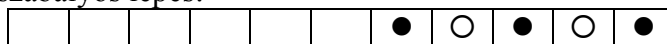


11 tüskén, 3 fekete és 2 fehér korongunk van, a tüskéken váltakozó sorrendben elhelyezve.

A korongokat mindig kettesével kell mozgatni (a sorrend megváltoztatása nélkül) és egyszerre csak **két egymás melletti tüskén lévő, különböző színű korong** szerepelhet egy lépésben. A két koronggal bármilyen irányba léphetünk szomszédos tüskékre. A játék célja, hogy **négy** lépésben a 11 tüske másik végére úgy helyezzük el a korongokat, hogy elöl a két fehér, utána a három fekete álljon.



Ez lehet egy szabályos lépés:

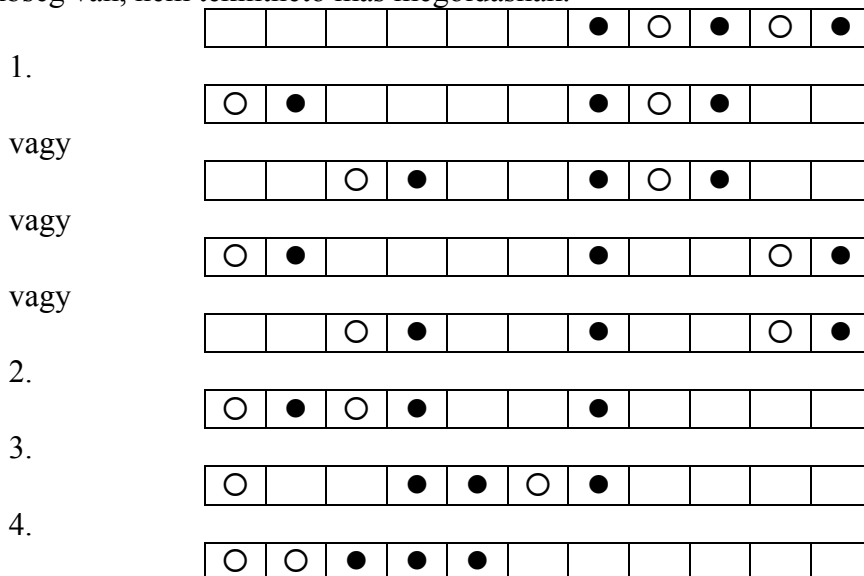


A nem túl nagy bodzafa korongok kis gyakorlással **egy kézzel** jól mozgathatóak; erre a továbbiakban is szükség lesz.

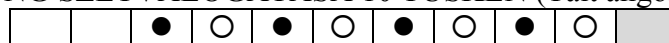
Hívjuk fel a figyelmet az aláhúzott részre, ez adja majd a megoldás kulcsát is.

Lehet fordítva gondolkodni, a „varázsmondat”: hogyan jutottál el a megoldáshoz? Nem ellentmondás az a tény, hogy azonos színűek egymás mellett vannak? Próbáljunk a megoldásból visszalépegetni a kiinduló helyzetbe.

A harmadik feladatnak egy megoldása van. Az első lépésnél csak lépés sorrendi különbség van, nem tekinthető más megoldásnak.



4. NYOLC KORONG SZÉTVÁLOGATÁSA 10 TÜSKÉN (Tait angol fizikus játéka) (1, 2)

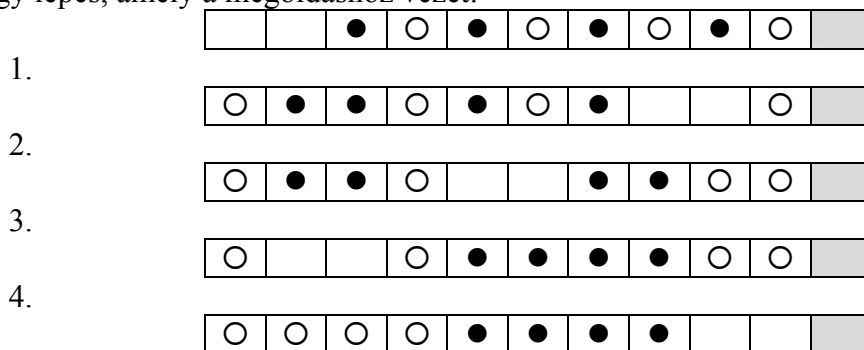


Vegyünk 4 fehér és 4 fekete korongot, és helyezzük el őket váltakozó sorrendben egymást követve a tüskéken. A feladat az, hogy a két szabad hely felhasználásával, (amelyek egymás mellett vannak a bal oldalon) **négy** lépésben változtassuk meg a korongok sorrendjét úgy, hogy először a fehér, aztán a fekete korongok következzenek. A korongokat továbbra is **kettesével, a sorrend változtatása nélkül** szomszédos tüskékre mozgathatjuk.

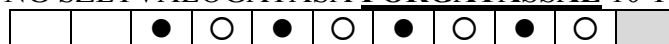


A végeredményből (de a szövegből) is kiderül, hogy nem lehet kötelező két **különböző** korong mozgatása. Öt lépésben is megoldható a „logisztikai feladat”, de négyben elegánsabb. A két szabad tüskére egy fehér és egy fekete korong kerül. De nem semleges a korongok sorrendje! Ezt fogalmazzuk meg a gyerekekkel és akkor logikus folytatásként, eljutnak a megoldáshoz. Ha máshol kezdenek, mint ahol kellene, akkor jön az öt lépéses megoldás.

A négy lépés, amely a megoldáshoz vezet:



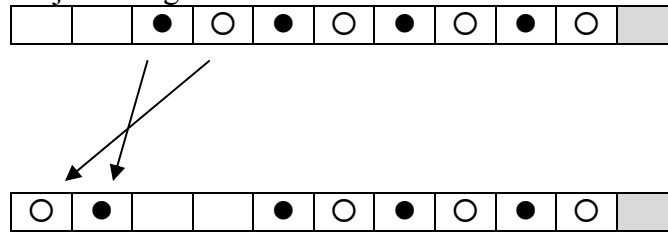
5. NYOLC KORONG SZÉTVÁLOGATÁSA **FORGATÁSSAL** 10 TÜSKÉN (1,2,3)



Vegyünk 4 fehér és 4 fekete korongot, és helyezzük el őket váltakozó sorrendben a tüskéken. A feladat az, hogy a két szabad hely felhasználásával, **öt lépésben** változtassuk meg a korongok sorrendjét úgy, hogy először a fehér, aztán a fekete korongok következzenek. Az egymás melletti korongokat kettesével, a **sorrend felcserélésével** (forgatással) rakhatjuk át két egymás melletti szabad tüskékre.

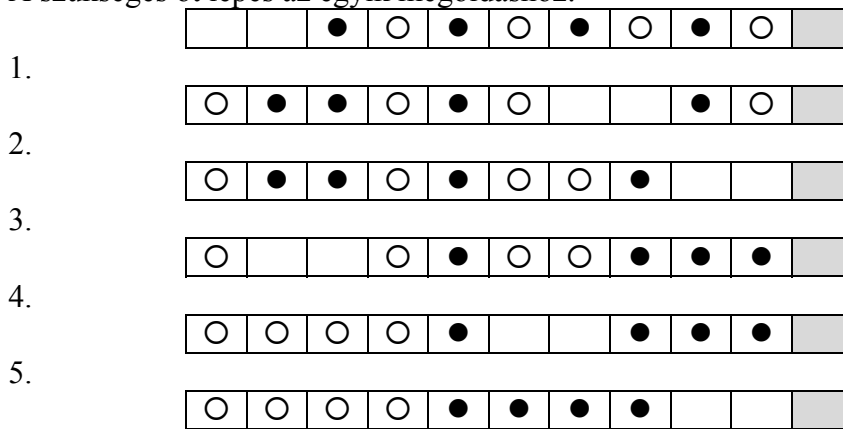


Ezt a mozgást értjük a forgatás alatt.



Az előző feladattal azonos problémák merülnek fel azzal kiegészítve, hogy az immár két korongot ügyesen mozgató kezek most a forgáshoz is hozzá kell, hogy szokjanak. Legalábbis az első lépéseknél. Már az első lépésnél úgy kell lépni, hogy azonos színek kerüljenek egymás mellé, és itt sem követelmény a különböző korongok együttes mozgatása. Minden olyan észrevételt, amely előre visz, támogatni kell, esetleg külső motivációval is. Ilyen kort élünk!

A szükséges öt lépés az egyik megoldáshoz:



### 6. ÖT KORONG FORGATÁSA 11 TÜSKÉN



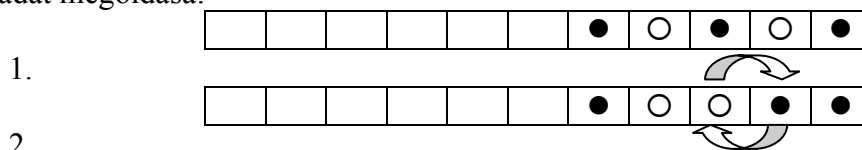
11 tuskénk van; 3 fekete és 2 fehér korongunk, a tuskéken váltakozó sorrendben elhelyezve. *A korongokat mindig kettesével kell mozgatni - a sorrend kötelező felcserélésével (forgatással). Egyszerre csak két egymás mellett lévő korong szerepelhet egy lépésben és egymás melletti tuskékre lehet lépni. A játék célja, hogy négy lépésben a 11 tüske másik végére úgy helyezzük el a korongokat, hogy elől a két fehér, utána a három fekete álljon.*



A feladat ugyanaz mint a harmadik játéknál, csak forgatással fűszerezve. A hat szabad tüske csábítóan kínálja magát. A próbálkozások csak akkor fognak eredményre vezetni, ha a gyerekek rájönnek arra, hogy két korong helycseréje is forgatás.

Itt hamar fogjuk hallani az eddig sem ritka „Ezt lehetetlen megoldani!” kijelentést. A feladat példa arra, hogy a sematikus gondolkodás nem vezet eredményre. A konvencionális lépések helyett, a divergens gondolkodásra jellemző, a megszokottól eltérő lépésvajaslattal kell előállni. Ezért is soroltuk a nehezebb feladatok közé. A jó kezdőlépés után már igen egyszerű a feladatot megoldani.

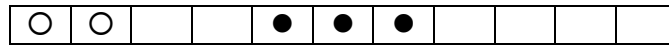
A feladat megoldása:



Ez lenne a nemszokványos lépés.



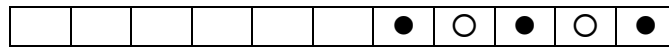
3.



4.



7. ÖT KORONG FORGATÁSA 11 TÜSKÉN MEGKÖTÉSSEL



Ugyanaz a feladat, mint az előző játékban. *Annyit nehezítettünk, hogy most minden lépésben kell, hogy szerepeljen egy fehér és egy fekete korong.* Hat lépéses megoldásokat találtunk.



A feladat egyik megoldása:



1.



2.



3.



4.



5.



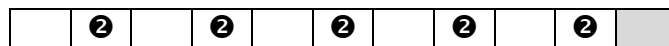
6.



8. EGYMÁSRA RAKÁS 10 KORONGGAL (1)



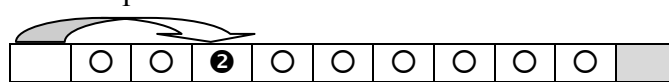
Ebben a játékban 10 tuskén lévő, 10 azonos korong szerepel. *A korongok közül egyet felemelünk, és valamelyik irányba elindulva két korongot átugrunk vele, és a harmadikra rátesszük és többet nem mozgathatjuk. Szabad tuskére nem lépünk és két korong együttesét sem bontjuk meg.* A játék célja, hogy a korongok – bárhol a tuskéken – kettesével egymásra kerüljenek.



A második játékban nyolc, itt tíz korongot kell kettesével elrendezni a tíz tuskén. Nagytatám ezt a feladatot még tíz gyufaszállal adta fel gyerekkoromban. Akkor az okozta a nehézséget, hogy egy idő után nem tudtam, hogy honnan vettem el az épp letett gyufát. Itt most a tuskék sokat segítenek, de még így is nehéz a feladat.

A 14 lehetséges kezdő lépés közül kell megtalálni az egy jó lépést. Egy megoldása van a feladatnak, ha eltekintünk a szimmetrikus megoldástól. Következtesen és fegyelmezetten kipróbálva a folytatható lépéseket, az eredmény nem fog elmaradni. Kerestessük meg a rossz lépéseket és fogalmazzassuk meg, hogy miért hibásak. Például:

1. lépés

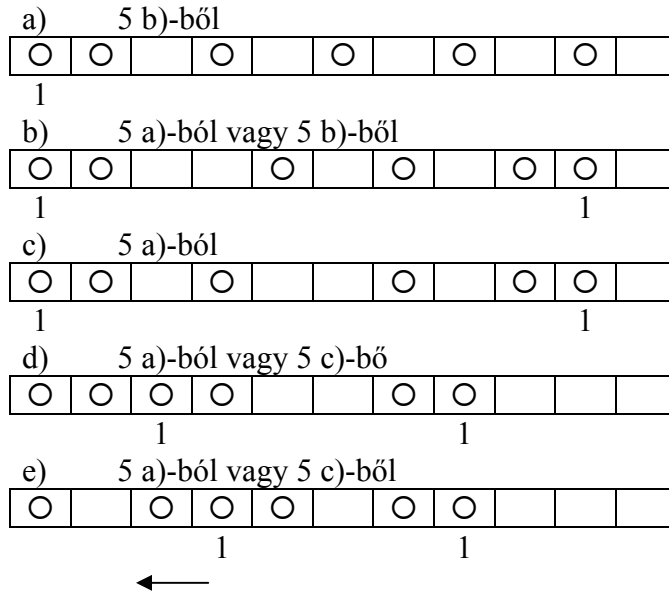


2. lépés

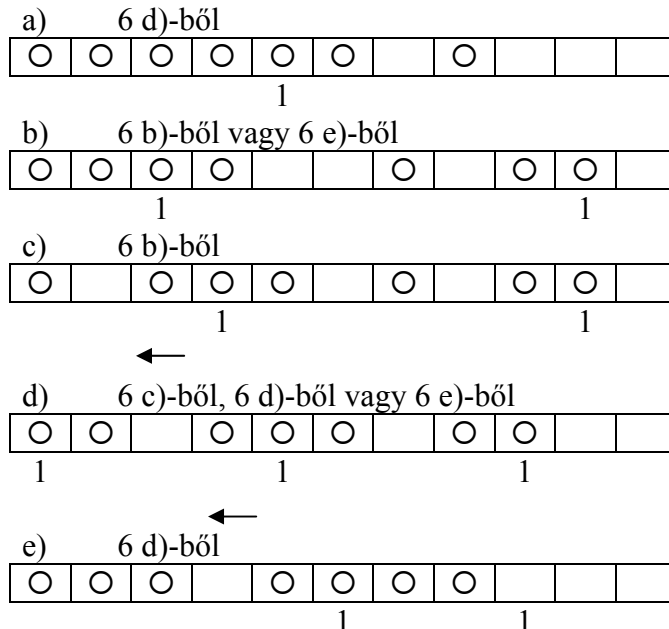
Akkor mi lesz ezzel a koronggal? Egy ilyen lépés mit eredményez? Fogalmazzassunk meg igaz állításokat, amelyek segítenek a megoldás megtalálásában!

A feladat megoldása:

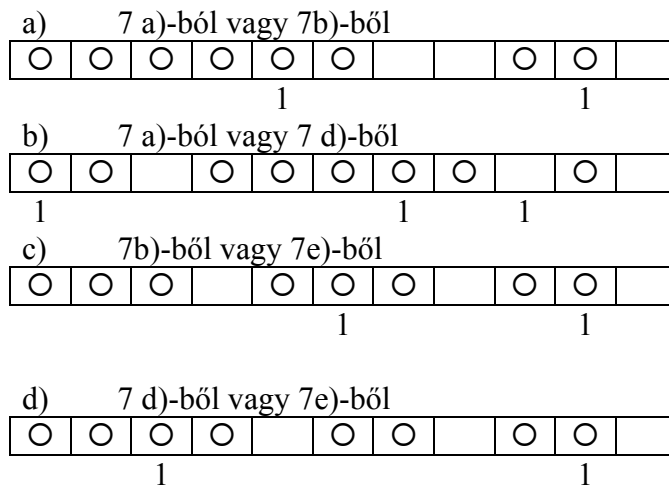




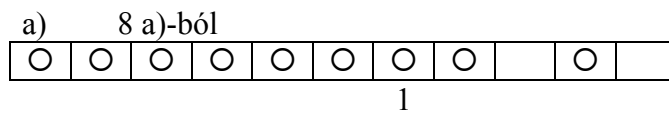
7 korongra



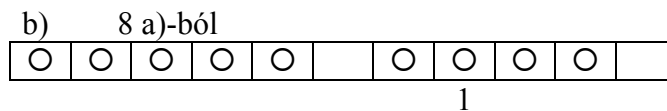
8 korongra



9 korongra







### 10. Csuka Ruma (Indiai eredetű játék) (2)

Az eredeti játékot öt gödörrel és nyolc kavicsal játsszák. Ahhoz, hogy tanteremben is játszható legyen, technika órákon elkészítjük a képen látható változatot.

De úgy gondolom, hogy a tizenegytüskés játékon is játszható ez az egy megoldásos de sok zsákutcsás gondolkodtató játék.

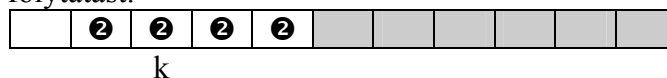


Valamelyik tüskéről leemeljük a két korongot és **balra** haladva egyesével ráarakjuk a többi tüskére, természetesen az utolsóira is, a Rumára – ide kell begyűjteni minden korongot és amit beraktunk azt már nem mozgathatjuk el. Ha a Rumánál (az utolsó tüskénél) nem fogyott el minden korong, akkor az elosztást jobbról az első tüskénél folytatjuk mindaddig, amíg el nem fogynak a kezünkből a korongok. Ha utolsó korongunk a Rumába került bárhonnan folytathatjuk, ha olyan tüskére került, amin van korong, akkor minden korongot felemelve folytatjuk az osztogatást, de ha üres tüskére kerül, akkor vesztettünk és kezdhetjük előlről a játékot.

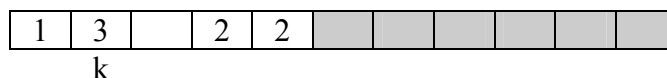


15 – 20 percet szánjunk a játékra, ennyi idő alatt egy átlagos osztály 10-20 százaléka megoldja. Nehezen érthető meg első olvasatra a játékszabály és nem könnyű nyomon követni a lépéseket sem.

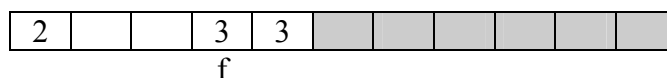
A megoldásban (k) jelöli a kezdő, vagy újratezdő lépést, (f) a kötelező folytatást.



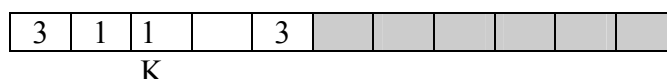
1. lépés



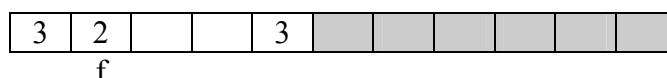
2. lépés



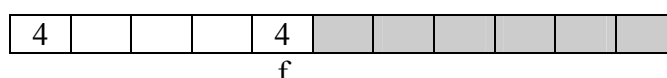
3. lépés



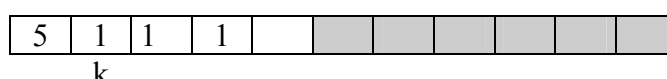
4. lépés



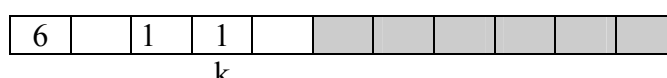
5. lépés



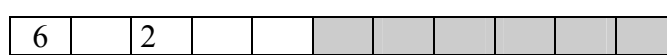
6. lépés



7. lépés



8. lépés



---

f

9. lépés

7	1									
---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--

f

10. lépés

8										
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Remélem, hogy aki elkészíti a játékot az eredménnyel fogja azt használni matematika órákon. További hasonló gondolkodtató játékokról a [www.furfang.hu](http://www.furfang.hu) és a [www.furfang.hu/koma39](http://www.furfang.hu/koma39) oldalakon olvashatunk. Bármilyen észrevételt is ezekre az oldalakra várok.

Székely Márton

#### Irodalom

1. J. I. Ignatyev: A találékonyság birodalmában, Tankönyvkiadó, Budapest 1982
2. Mosonyi Kálmán: Matematikai játékok, Tankönyvkiadó, Budapest 1976
3. Pieter van Delft, Jack Botermans: Denk spiele der Welt, Hugendubel kiadó, München 1975